

第14回 等差数列

1 とうさすうれつ 等差数列とは？

次の数の列は、どんなきまりでなっているでしょうか？

3, 10, 17, 24, 31, 38, ……

左から見ていくと、3から7ずつふえていくことがわかりますね。

このように、ある数に一定の数を次々に^{くわ}加えたり、ある数から一定の数を次々にひいたりして作られる数の列(数列)を**等差数列**といいます。

この数列で、次々に加えた7のことを**公差**といいます。

この数列の20番目の数や100番目の数などを、かんたんに求める方法はないでしょうか。

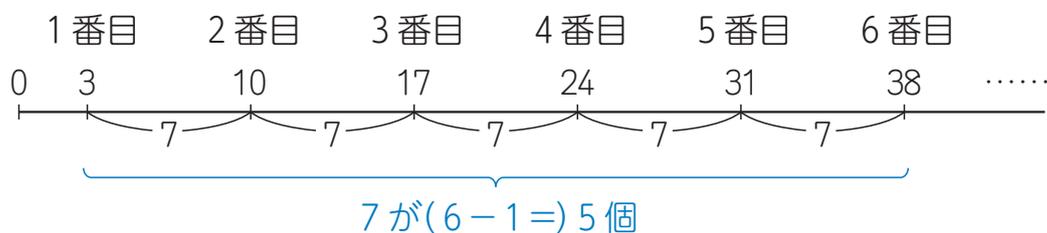
7をくり返し加えて求めるのはたいへん！

6番目の数(38)を例にして、考えてみましょう。

6番目の数は、下の図のように、はじめの数3に、7を(6 - 1 =) 5個加えて作られていますから、

$$3 + 7 \times (6 - 1) = 38$$

と求めることができます。



間数は1少なくなるね。

このことから、等差数列の□番目の数は、次の式で求められます。

$$\text{等差数列の}\square\text{番目の数} = \text{はじめの数} + \text{公差} \times (\square - 1)$$

例題1

あるきまりにしたがって、下のように数をならべます。

4, 7, 10, 13, 16, 19, ……

左から20番目の数はいくつですか。

解き方

4に3を次々に加えて作られる等差数列ですから、20番目の数は、

$$4 + 3 \times (20 - 1) = 61$$



はじめの数が4,
公差が3だね。

答 61

類題1

あるきまりにしたがって、下のように数をならべます。

1, 8, 15, 22, 29, ……

左から25番目の数はいくつですか。

例題2

あるきまりにしたがって、下のように数をならべます。

5, 11, 17, 23, 29, 35, ……

125は左から何番目にありますか。

解き方

5に6を次々に加えて作られる等差数列です。

加えた6の個数(図のアにふくまれる6の個数)は、

$$(125 - 5) \div 6 = 20(\text{個})$$

ですから、125は左から、

$$20 + 1 = 21(\text{番目})$$



$5 + 6 \times (\square - 1) = 125$ の逆算
をしてみると考えてもいいよ。



答 21番目

類題2

あるきまりにしたがって、下のように数をならべます。

1, 9, 17, 25, 33, ……

201は左から何番目にありますか。

2 等差数列の和

次に、等差数列の和を求める方法について考えましょう。

3, 10, 17, 24, 31, 38, ……

という等差数列の1番目から5番目までの和は、

$$3 + 10 + 17 + 24 + 31 = 85$$

と求められます。しかし、加える個数がふえると計算がたいへんです。

そこで、右のように、このたし算を逆
にならべて、たてに加えてみましょう。

3	+	10	+	17	+	24	+	31	} 逆にならべる
31	+	24	+	17	+	10	+	3	
$34 + 34 + 34 + 34 + 34$									

$$3 + 31 = 34, \quad 10 + 24 = 34, \quad \dots\dots$$

と、どれも34で等しくなりますね。

したがって、等差数列の和の2倍が $(3 + 31) \times 5$ とわかりますから、等差数列の和は、

$$(3 + 31) \times 5 \div 2 = 85$$

と求めることができます。

このことから、等差数列の和は、次の式で求められます。

$$\text{等差数列の和} = (\text{はじめの数} + \text{終わりの数}) \times \text{個数} \div 2$$

例題3

あるきまりにしたがって、下のように数を25個ならべます。

6, 10, 14, 18, 22, ……

ならべた数をすべて加えると、その和はいくつになりますか。

解き方

6に4を次々に加えて作られる等差数列ですから、

$$6 + 4 \times (25 - 1) = 102 \quad \dots\dots 25\text{番目の数}$$

$$(6 + 102) \times 25 \div 2 = 1350 \quad \dots\dots 25\text{番目までの和}$$

答 1350

類題3

あるきまりにしたがって、下のように数を30個ならべます。

4, 7, 10, 13, 16, ……

ならべた数をすべて加えると、その和はいくつになりますか。

3 きすう 奇数をならべた数列

2でわり切れる整数をぐうすう偶数といいます。

2でわり切れない整数(2でわると1あまる整数)を奇数といいます。

偶数, 奇数をそれぞれ小さい方からじゆん順にならべると, 次のように, どちらも公差が2の等差数列になります。

偶数 0, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 2, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 4, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 6, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 8, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 10, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 12, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 14, ……
 ★奇数 1, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 3, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 5, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 7, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 9, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 11, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 13, $\overset{+2}{\curvearrowright}$ 15, ……

0は偶数だよ!



ここで, 奇数をならべた数列(★)に注目してみましょう。

この数列は等差数列ですから, ①と②で学習した公式を使えば, 「□番目の奇数」や「□番目までの奇数の和」を求めることができますね。

でも, 奇数をならべた数列では, 次の公式を使うと, もっとかんたんに求めることができます。

奇数を1から順にならべた数列「1, 3, 5, 7, 9, ……」について,

㊦ □番目の奇数 = $2 \times \square - 1$

㊩ □番目までの奇数の和 = $\square \times \square$

等差数列の公式にあてはめるよりも, かんたんな計算ですむことが多いよ。



まず, ㊦の公式についてたしかめてみましょう。

下の表のように, □を1, 2, 3, ……としていくと, $2 \times \square$ は偶数が2から順にならび, $2 \times \square - 1$ は奇数が1から順にならぶことがわかります。

□(番目)	1	2	3	4	5	6	…	
$2 \times \square$	2	4	6	8	10	12	…	←偶数が2から順にならぶ。
$2 \times \square - 1$	1	3	5	7	9	11	…	←奇数が1から順にならぶ。

次に、①の公式についてもたしかめてみましょう。

1から順に奇数だけをたしていくと、次のようになります。

1番目	<u>1</u>	← 1 × 1
2番目までの和	1 + 3 = <u>4</u>	← 2 × 2
3番目までの和	1 + 3 + 5 = <u>9</u>	← 3 × 3
4番目までの和	1 + 3 + 5 + 7 = <u>16</u>	← 4 × 4
⋮		⋮

同じ整数を2個かけて
できる整数を**平方数**
というよ。



このように、□番目までの奇数の和が、□×□に等しいことがわかります。



～奇数の和の公式が成り立つ理由～

①の公式が成り立つ理由を考えてみましょう。

右のように、白石と黒石を交互にならべると、左上から、

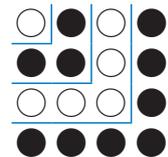
○が1個、●が3個、○が5個、●が7個

となります。全体は1辺が4個の正方形ですから、

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$$

が成り立つことがわかります。

このようにして、1から順に奇数を□個たしたときの和が、□×□に等しくなることが説明できます。



例題4

1から順に奇数をたしていきます。たとえば、4個の奇数をたすと、和は、

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

となります。

(1) 13個の奇数をたすと、和はいくつになりますか。

(2) 和が400になりました。最後にたした奇数はいくつですか。

解き方

(1) ①の公式より,

$$13 \times 13 = 169$$

(2) $400 = 20 \times 20$

より, 20個の奇数をたしたことがわかります。

したがって, ㉔の公式より, 最後にたした奇数(20番目の奇数)は,

$$2 \times 20 - 1 = 39$$

(1)を等差数列の公式でとくと,

$$1 + 2 \times (13 - 1) = 25$$

$$(1 + 25) \times 13 \div 2 = 169$$

だね。



答 (1) 169 (2) 39

類題4

1から順に奇数をたしていきます。

- (1) 17個の奇数をたすと, 和はいくつになりますか。
- (2) 和が576になりました。最後にたした奇数はいくつですか。

～少年ガウスの頭脳～

みなさんは, 世紀の大数学者, カール・フリードリヒ・ガウス(1777年ドイツ生まれ)を知っていますか?

ガウスは7才のとき,
「1から100までの数を全部たしなさい。」
という問題を出されて,
「5050!」

とすぐさま答えて, まわりの人をおどろかせたといわれています。少年ガウスは,

$$\begin{aligned} & \left[1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad \dots, \quad 50 + 51 = 101 \right. \\ & \left. \text{だから, } 101 \times 50 = 5050 \right] \end{aligned}$$

というとき方をその場で思いついたそうで, なるほどたいへんな頭脳ですね。



基本問題



① 次の問いに答えなさい。

(1) 次の数列の, ア, イにあてはまる数はそれぞれいくつですか。

1, 7, 13, , 25, , 37, ……

(2) あるきまりにしたがって, 下のように数をならべます。

2, 5, 8, 11, 14, ……

左から15番目の数はいくつですか。

(3) あるきまりにしたがって, 下のように数をならべます。

99, 95, 91, 87, 83, ……

左から20番目の数はいくつですか。

(4) あるきまりにしたがって, 下のように数をならべます。

1, 5, 9, 13, 17, ……

93は左から何番目にありますか。

(5) 1から10までの整数の和はいくつですか。

(6) 次の式の, ア, イにあてはまる数はそれぞれいくつですか。

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}$$

2 あるきまりにしたがって、下のように数を25個ならべました。

2, 6, 10, 14, 18, ……

これについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 最後にならべた数はいくつですか。
- (2) ならべた数をすべて加えると、その和はいくつになりますか。

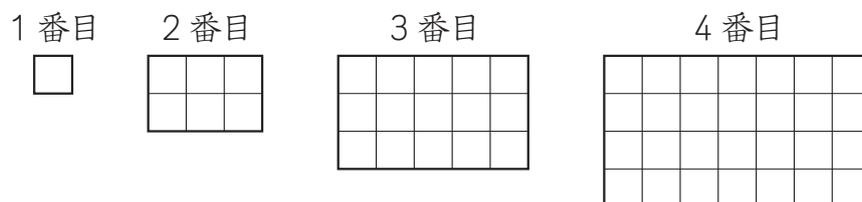
3 あるきまりにしたがって、下のように数をならべました。

88, 82, 76, 70, 64, …… , 22

これについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 全部で数を何個ならべましたか。
- (2) ならべた数をすべて加えると、その和はいくつになりますか。

4 下のように、あるきまりにしたがって、1辺が1cmの正方形をしきつめて長方形を作っていきます。



これについて、次の問いに答えなさい。

- (1) 10番目の長方形のまわりの長さは何cmですか。
- (2) まわりの長さが130cmになるのは、何番目の長方形ですか。

練習問題



① あるきまりにしたがって、下のように数をならべます。

5, 11, 17, 23, 29, ……

これについて、次の問いに答えなさい。

(1) 左から10番目の数はいくつですか。

(2) 89は左から何番目にありますか。

(3) この数列にあらわれる2けたの数をすべて加えると、その和はいくつになりますか。

② あるきまりにしたがって、下のように数をならべます。

3, 11, 19, 27, 35, ……

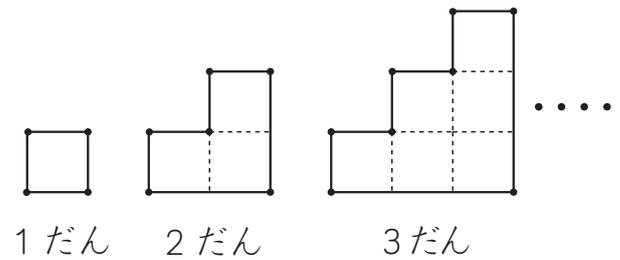
ならべた数のうち、200以下で最も大きい数はいくつですか。また、それは左から何番目にありますか。

③ 長さ9cmのテープを、のりしろの長さをどこも2cmにして、まっすぐにつないでいきます。これについて、次の問いに答えなさい。

(1) つなげたテープの本数が2本、3本、4本のとき、全体の長さはそれぞれ何cmになりますか。

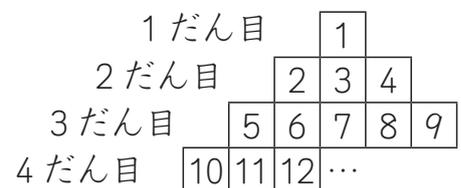
(2) 全体の長さが240cmになるのは、テープを何本つなげたときですか。

4 1辺が1 cmの正方形をならべて、右の図のような階だんの形をした図形を作っていきます。そして、頂点ちやうてんのところに●印をつけます。●印の数は、たとえば、1だんの場合は4個、2だんの場合は6個です。これについて、次の問いに答えなさい。



- (1) 10だんのとき、●印は何個つきますか。
- (2) ●印が50個ついた図形のまわりの長さは何cmですか。

5 図のように、階だんの形にならべた正方形に、1から順に整数をかき入れていきます。これについて、次の問いに答えなさい。



- (1) 1だん目から12だん目までに、正方形は全部で何個ならんでいますか。
- (2) 12だん目の正方形にかき入れた整数の和はいくつになりますか。