算　数

Ⅰ　ア…$\dfrac{27}{110}$　イ…緑　ウ…93　エ…96　オ…1369　カ…10　キ…19

Ⅱ　ア…2　イ…14　ウ…20　エ…70

Ⅲ　(1)　2500㎤　(2)　20.5　(3)　かかる時間…5分　積み方…解説参照　(4)　解説参照

Ⅳ　(1)　Aさん…6.2分　Bさん…7.44分　(2)　1回目…$1\dfrac{38}{55}$分後　2回目…$3\dfrac{21}{55}$分後　(3)　$4\dfrac{21}{22}$分後

解　説

Ⅰ　(1)

$$\left(7\frac{64}{91}\times\square-0.7-\frac{5}{13}\right)\times11+76\frac{11}{13}=85\frac{5}{7}$$

$$7\frac{64}{91}\times\square-0.7-\frac{5}{13}=\left(85\frac{5}{7}-76\frac{11}{13}\right)\div11=8\frac{79}{91}\div11=\frac{807}{1001}$$

$$\square=\left(\frac{807}{1001}+\frac{5}{13}+0.7\right)\div7\frac{64}{91}=\frac{18927}{10010}\div7\frac{64}{91}=\frac{27}{110}$$

(2)①　2021年はうるう年ではありませんから，1月1日から10月1日までの日数は，

31＋28＋31＋30＋31＋30＋31＋31＋30＋1＝274(日)

よって，{青，黄，黒，緑，赤}の5日を周期と考えると，

274÷5＝54(周期)あまり4(日)

より，10月1日は緑とわかります。

②　はじめに4月1日の色を求めると，

(31＋28＋31＋1)÷5＝18(周期)あまり1(日)

より，4月1日は青とわかります。よって，4月の最初の黒は4月3日になります。さらに，黒は5日ごとにあらわれますから，4月の黒の日付の和は，

3＋8＋13＋18＋23＋28＝(3＋28)×6÷2＝93

(3)①　99から順に調べていきます。

・**A＝99の場合**　99の約数は{1，3，9，11，33，99}の6個ですから，
<99>÷【99】＝(3＋9＋11＋33＋99)÷(6－1)＝155÷5＝31　(×)

・**A＝98の場合**　98の約数は{1，2，7，14，49，98}の6個ですから，
<98>÷【98】＝(2＋7＋14＋49＋98)÷(6－1)＝170÷5＝34　(×)

・**A＝97の場合**　97の約数は{1，97}の2個ですから，
<97>÷【97】＝97÷(2－1)＝97　(×)

・**A＝96の場合**　96の約数は{1，2，3，4，6，8，12，16，24，32，48，96}の12個ですから，
<96>÷【96】＝(2＋3＋4＋6＋8＋12＋16＋24＋32＋48＋96)÷(12－1)
＝251÷11＝22.8…　(○)

よって，条件に合う最大の整数は96です。

②　【B】＝2ですから，Bの約数の個数は(2＋1＝)3個です。よって，Bは素数の積で表したときに(□×□)となる整数(平方数)であり，Bの約数は{1，□，□×□}の3個になります。つまり，

<B>＝□＋□×□＝□×(1＋□)＝1406

と表すことができます。ここで，1406を素数の積で表すことにより，

1406＝2×19×37＝37×(2×19)＝37×38

となることがわかりますから，□は37と決まり，

B＝37×37＝1369

③　２を10回かけた数の約数の個数は(10＋１＝)11個ですから，１以外の約数の個数は(11－１＝)10個です。よって，【Ｃ】＝10となります。

④　【Ｄ】＝３ですから，Ｄの約数の個数は(３＋１＝)４個です。よって，Ｄを素数の積で表すと，

　㋐　□×□×□　または　㋑　□×△

となりますから，60以下の個数は，

　㋐　２×２×２＝８，３×３×３＝27　の２個

　㋑　右の表より17個

したがって，全部で，

　２＋17＝19(個)

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
2		6	10	14	22	26	34	38	46	58
3			15	21	33	39	51	57		
5				35	55					

Ⅱ　(1)　右の図①のように，四すみをＡ～Ｄ，四すみ以外をａ～ｄとします。１枚取りかえる場合は，四すみの１枚を取りかえる場合と四すみ以外の１枚をとりかえる場合の２通り(…ア)です。また，３枚取りかえる場合と４枚取りかえる場合は，次のように四すみの枚数で場合分けをして求めます。

図①

A	a	B
b	◎	c
C	d	D

・３枚取りかえる場合

(a)四すみが３枚の場合……Ａ～Ｄのうち，取りかえない１枚を選ぶのと同じですから，１通りです。

(b)四すみが２枚の場合……四すみがＡとＢの場合，残りの１枚の選び方は{ａ，ｂ，ｃ，ｄ}の４通りです。また，四すみがＡとＤの場合，残りの１枚の選び方は{ａ，ｂ}の２通りです。よって，合わせて(４＋２＝)６通りです。

(c)四すみが１枚の場合……四すみがＡの場合だけを考えます。このとき，残りはａ～ｄから２枚選ぶので(４×３÷２＝)６通りです。

(d)四すみが０枚の場合……ａ～ｄから取りかえない１枚を選ぶのと同じですから，１通りです。

したがって，３枚取りかえる場合は全部で(１＋６＋６＋１＝)14通り(…イ)となります。

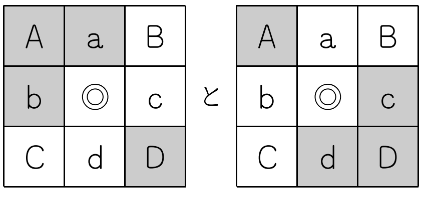
・４枚取りかえる場合

(e)四すみが４枚の場合……Ａ～Ｄをすべてとりかえるので，１通りです。

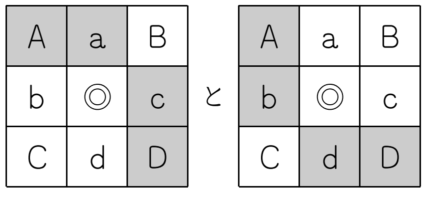
(f)四すみが３枚の場合……四すみがＡ，Ｂ，Ｃの場合だけを考えます。このとき，残りはａ～ｄから１枚選ぶので，４通りです。

(g)四すみが２枚の場合……四すみがＡとＢの場合とＡとＤの場合があり，どちらも残りはａ～ｄから２枚選ぶので６通りずつです。ただし，下の図②と図③の場合はそれぞれ同じなので，(６×２－２＝)10通りです。

図②



図③



(h)四すみが１枚の場合……四すみがＡの場合だけを考えます。このとき，ａ～ｄから取りかえない１枚を選ぶのと同じですから，４通りです。

(i)四すみが０枚の場合……ａ～ｄをすべて取りかえるので，１通りです。

したがって，全部で(１＋４＋10＋４＋１＝)20通り(…ウ)です。

(2)　５枚取りかえる場合は，取りかえない(８－５＝)３枚を取りかえる場合と同じ数だけありますから，14通りとわかります。ほかの場合についても同様に考えると右の図④のようになりますから，全部で，

　(１＋２＋８＋14)×２＋20＝70(通り)(…エ)

図④

枚数　(枚)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
模様(通り)	1	2	8	14	20	14	8	2	1

Ⅲ　(1)　問題文の場合を図に表すと，右の図①のように
なります。図①で，太線部分の体積は，

35×35×70＝85750(㎤)

立方体12個の体積は，

10×10×10×12＝12000(㎤)

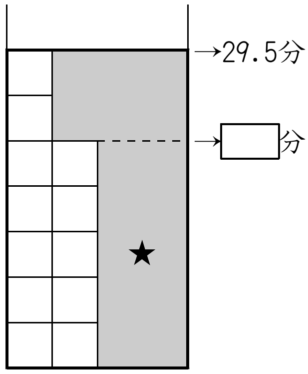
ですから，29.5分で入れた水の体積は，

85750－12000＝73750(㎤)

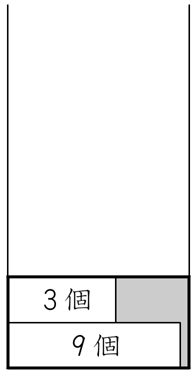
となります。よって，水を入れた割合は，

73750÷29.5＝2500(㎤／分)

図①



図②



(2)　★の部分の体積は，

(35×35－10×10×２)×50＝51250(㎤)

ですから，□にあてはまる時間は，

51250÷2500＝20.5(分)

(3)　立方体の１辺の長さは10㎝で，容器の底面の１辺の長さは35㎝ですから，底面の１つの辺にそって，立方体を３個まで入れることができます。よって，１つの段には(３×３＝)９個まで入れることができますから，最も短い時間で水が止まるのは，たとえば右上の図②のように，１段目に９個，２段目に(12－９＝)３個入れる場合です。図②で，

35×35×20＝24500(㎤)　……太線部分の体積

24500－12000＝12500(㎤)……水の体積

となりますから，水が止まるまでの時間は，

12500÷2500＝５(分)

このとき，１段目と２段目の個数の合計が12個で，２段目の個数が１段目の個数以下であればよいですから，右の図③のような積み方が考えられます。

図③

１段目	２段目	３段目	４段目	５段目	６段目	７段目	８段目
9	3	0	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	0	0
6	6	0	0	0	0	0	0

(4)　19.7分で入る水の体積は，

2500×19.7＝49250(㎤)

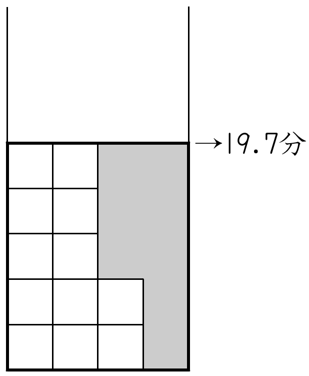
です。また，このときちょうど12個目の立方体が水の中に入りますから，

49250＋12000＝61250(㎤)……水の体積と立方体の体積の合計

61250÷(35×35)＝50(㎝)……水の深さ

となります。よって，19.7分後には５段目まで積まれていて，たとえば右の図④のようになることがわかります(図④は１段目が３個の場合)。

図④



このとき，１段目の個数が多い順に，

(８個，１個，１個，１個，１個)……１番目
(７個，２個，１個，１個，１個)……２番目
(６個，３個，１個，１個，１個)……３番目の例
(５個，４個，１個，１個，１個)……４番目の例

となります。したがって，１段目の個数が多い方から４番目なのは，１段目が５個の場合ですから，右の図⑤のような積み方が考えられます。

図⑤

１段目	２段目	３段目	４段目	５段目	６段目	７段目	８段目
5	4	1	1	1	0	0	0
5	3	2	1	1	0	0	0
5	2	2	2	1	0	0	0

Ⅳ　(1)　Ａさん，Ｂさんが進む円のまわりの長さはそれぞれ，

$50\times2\times3.1=310$(m)　……Ａさん

$(50+10)\times2\times3.1=372$(m)……Ｂさん

ですから，Ａさん，Ｂさんが1周するのにかかる時間はそれぞれ，

$310\div50=6.2$(分)　……Ａさん

$372\div50=7.44$(分)……Ｂさん

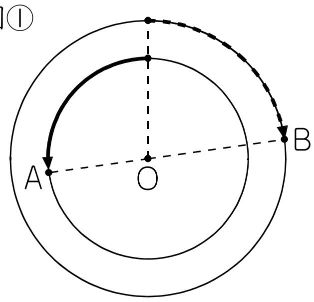
(2)　時計算と同じように，Ａさん，Ｂさんが1分間に進む角度(角速度)を考えます。Ａさんは6.2分で1周し，Ｂさんは7.44分で1周します。また，1周は360度ですから，

$360\div6.2=\frac{1800}{31}$(度／分)　……Ａさんが1分間に進む角度

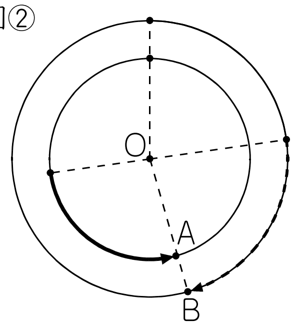
$360\div7.44=\frac{1500}{31}$(度／分)……Ｂさんが1分間に進む角度

次に，右の図①のように，ＡさんとＢさんが合わせて180度進むと，Ａ→Ｏ→Ｂの順に一直線上に並びます。さらに，図①の状態から合わせて180度進むと，右の図②のように，Ｂ→Ａ→Ｏの順に一直線上に並びます。その後は同じことがくり返されますから，ＡさんとＢさんが合わせて180度動くごとにベルが鳴ることがわかります。よって，

図①



図②



$\frac{1800}{31}+\frac{1500}{31}=\frac{3300}{31}$(度／分)　……ＡさんとＢさんが1分間に進む角度の和

$180\div\frac{3300}{31}=\frac{93}{55}=1\frac{38}{55}$(分ごと)……ベルが鳴る間かく$\left(1\text{回目は}1\frac{38}{55}\text{分後}\right)$

$\frac{93}{55}\times2=\frac{186}{55}=3\frac{21}{55}$(分後)　……2回目

(3)　はじめの速さのままで進むと$\frac{93}{55}$分ごとにベルが鳴りますから，はじめの速さのままで進んだときに5回目のベルが鳴るのは，

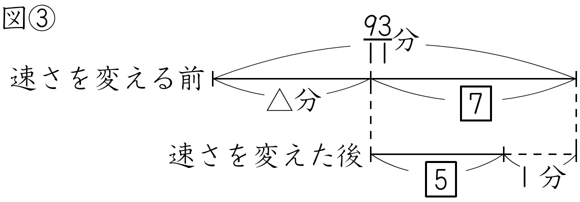
$\frac{93}{55}\times5=\frac{93}{11}$(分後)

また，速さを変える前と変えた後の速さ(および角速度)の比は，2人とも(50：70＝)5：7ですから，速さを変える前と変えた後の「2人の角速度の和」の比も5：7になります。よって，速さを変える前と変えた後で，「同じ角度だけ進むのにかかる時間」の比は，

$\frac{1}{5}:\frac{1}{7}=7:5$

となります。したがって，速さを変えるまでの時間を△分として図に表すと，右の図③のようになります。図③で，

図③



$1\div(7-5)=\frac{1}{2}$(分)　……$\boxed{1}$の時間

$\frac{93}{11}-\frac{1}{2}\times7=\frac{109}{22}=4\frac{21}{22}$(分)……△

となりますから，速さを変えたのは出発してから$4\frac{21}{22}$分後です。